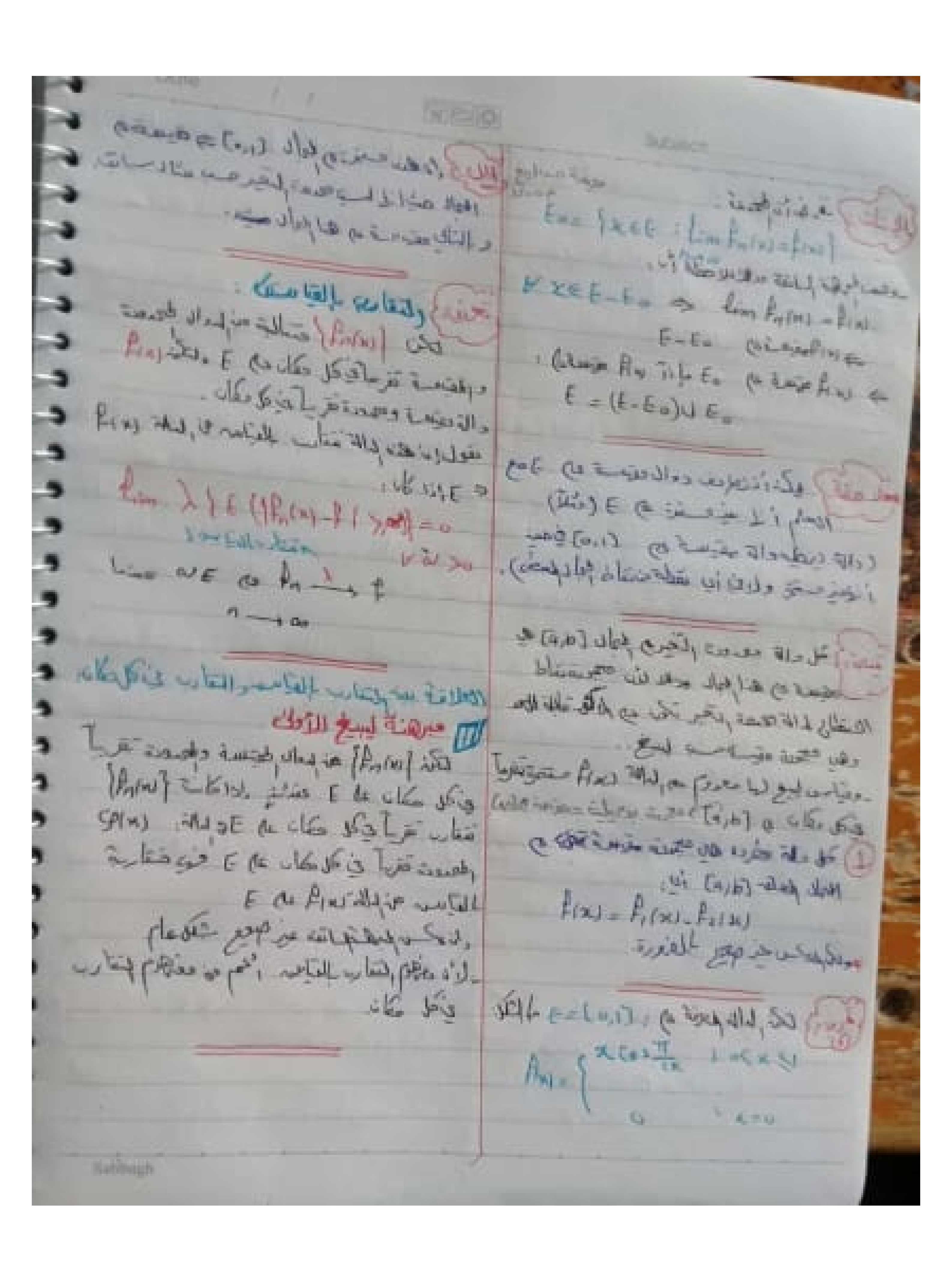






نعرف المجموعة:

$E_0 = \{x \in E : \lim f_n(x) = f(x)\}$

[illegible]

$\forall x \in E - E_0 \Rightarrow \lim f_n(x) \neq f(x)$

[illegible] $E - E_0$

[illegible] E_0 [illegible]

$E = (E - E_0) \cup E_0$

ويمكن تعريف دوال متقاربة [illegible] E (تقريبا)

[illegible] [0,1] [illegible]

[illegible]

كل دالة محدودة وقابلة للتكامل على [a,b] [illegible]

[illegible]

[illegible] [a,b] [illegible]

1. كل دالة [illegible] [a,b] [illegible]

$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$

[illegible] للفترة

لتكن الدالة المعرفة على $E = [0,1]$ بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\frac{\pi}{2x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مثال: [illegible] [0,1] [illegible]

[illegible]

التقارب بالقياس:

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال المعرفة [illegible] E [illegible] $f(x)$

[illegible]

نقول إن هذه الدوال تتقارب بالقياس إلى الدالة $f(x)$ [illegible]

$$\lim_{n \to \infty} \lambda\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0$$

$f_n \xrightarrow{\lambda} f$ on E, $n \to \infty$

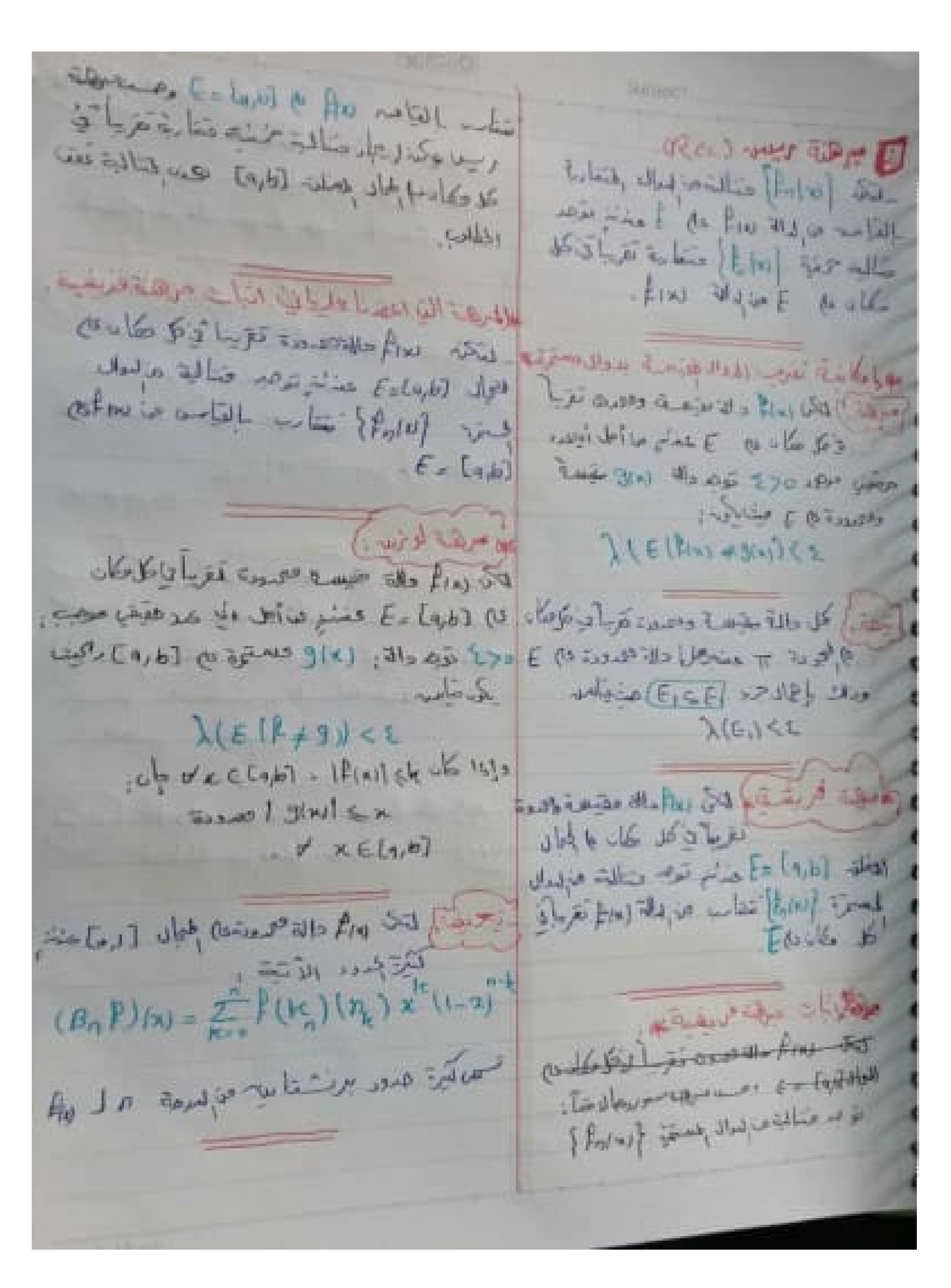
العلاقة بين التقارب بالقياس والتقارب في كل مكان

مبرهنة ليبيغ الأولى

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال المقيسة والمحدودة تقريبا في كل مكان على E [illegible] $\{f_n(x)\}$ تتقارب تقريبا في كل مكان على E إلى دالة $f(x)$ [illegible] E فهي متقاربة بالقياس من الدالة $f(x)$ على E

[illegible]

لأن مفهوم التقارب بالقياس أعم من مفهوم التقارب في كل مكان.



5 مبرهنة ايجوروف (Egorov)

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال المتقاربة بالقياس من دالة $f(x)$ على E فإنه توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}(x)\}$ متقاربة تقريباً في كل مكان على E من الدالة $f(x)$.

مبرهنة امكانية تقريب الدالة المقيسة بدوال مستمرة

مبرهنة: لتكن $f(x)$ دالة مقيسة ومحدودة تقريباً في كل مكان على E فمن أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ توجد دالة $g(x)$ مستمرة ومحدودة على E بحيث يكون:

$$\lambda(E(f(x)\neq g(x)))<\varepsilon$$

نتيجة: كل دالة مقيسة ومحدودة تقريباً في كل مكان على E [illegible] فمن أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ توجد مجموعة $E_1\subset E$ بحيث يكون:

$$\lambda(E_1)<\varepsilon$$

مبرهنة فريشيه

لتكن $f(x)$ دالة مقيسة ومحدودة تقريباً في كل مكان على المجال $E=[a,b]$ فإنه توجد متتالية من الدوال المستمرة $\{f_n(x)\}$ تتقارب من الدالة $f(x)$ تقريباً في كل مكان على E.

اثبات مبرهنة فريشيه

~~لتكن $f(x)$ دالة محدودة تقريباً في كل مكان~~ على المجال $[a,b]$ [illegible] توجد متتالية من الدوال المستمرة $\{f_n(x)\}$ تتقارب بالقياس من $f(x)$ على $E=[a,b]$ ويمكن ايجاد متتالية جزئية متقاربة تقريباً في كل مكان على المجال $[a,b]$ [illegible] وهو المطلوب.

ملاحظة: النظرية السابقة [illegible] اثبات مبرهنة فريشيه

لتكن $f(x)$ دالة محدودة تقريباً في كل مكان على المجال $E=[a,b]$ فإنه توجد متتالية من الدوال $\{f_n(x)\}$ تتقارب بالقياس من $f(x)$ على $E=[a,b]$.

مبرهنة لوزين

لتكن $f(x)$ دالة مقيسة ومحدودة تقريباً في كل مكان على $E=[a,b]$ فإنه من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ توجد دالة $g(x)$ مستمرة على $[a,b]$ بحيث يكون:

$$\lambda(E(f\neq g))<\varepsilon$$

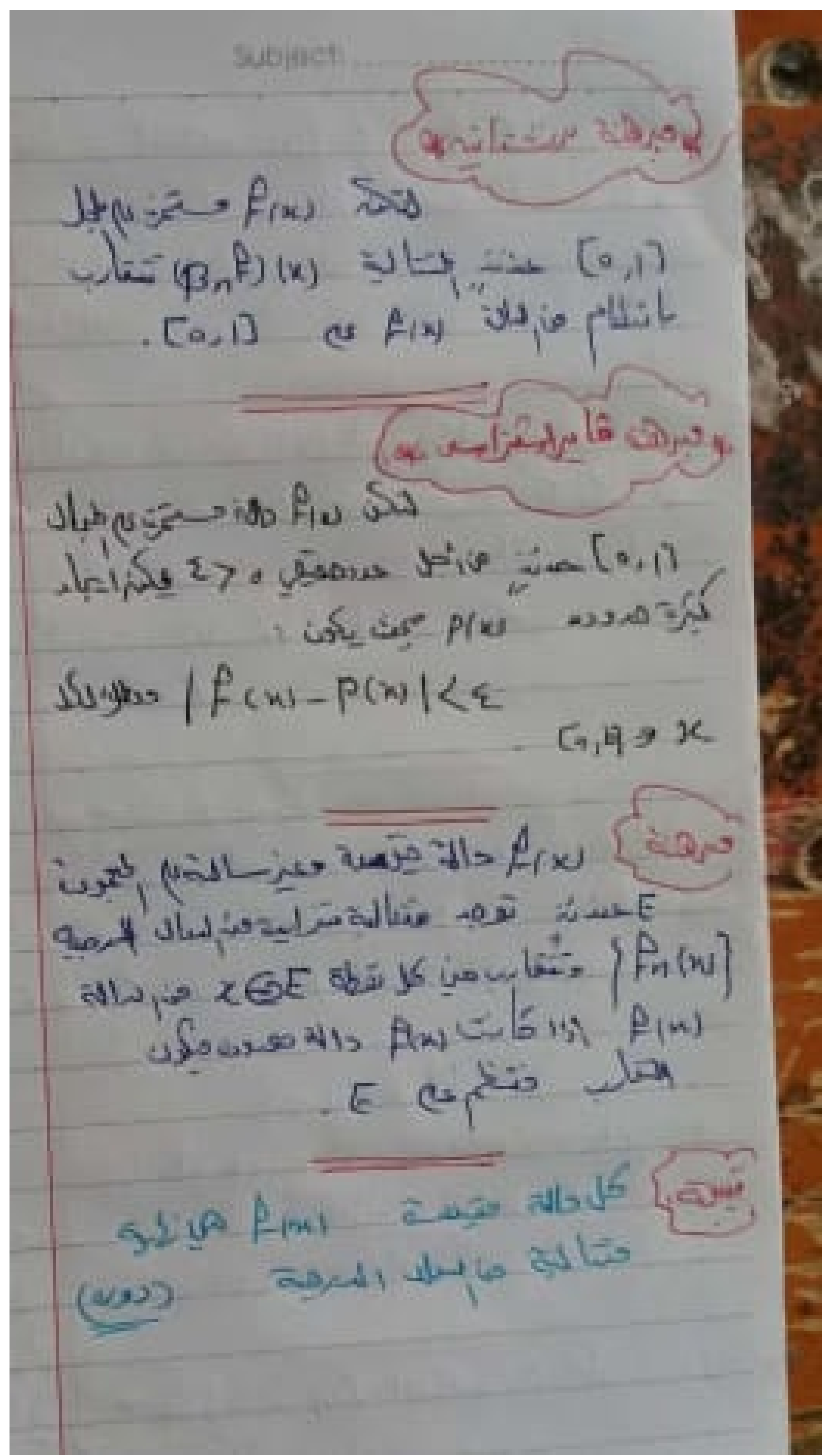
وإذا كان $|f(x)|\le k$ من أجل $x\in[a,b]$ فإن: $|g(x)|\le k$ [illegible] $\forall x\in[a,b]$.

تعريف

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[0,1]$ فإن كثيرة الحدود الآتية

$$(B_n f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

تسمى كثيرة حدود برنشتاين من المرتبة n لـ $f(x)$.



Subject

مبرهنة برنشتاين

لكل $f(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$ حدودية برنشتاين $(B_n f)(x)$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على $[0,1]$.

مبرهنة فايرشتراس

لكل $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ وحيث $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب فيمكن إيجاد كثيرة حدود $P(x)$ بحيث يكون:

$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ لجميع قيم $x \in [0,1]$.

مبرهنة

$f(x)$ دالة متصلة معرفة على المجموعة E محددة، توجد متتالية متزايدة من الدوال الدرجية $|f_n(x)|$ متقاربة من كل نقطة $x \in E$ من دالة $f(x)$ وإذا كانت $f(x)$ دالة محدودة يكون التقارب منتظم على E.

نتيجة كل دالة متصلة $f(x)$ هي نهاية متتالية من الدوال الدرجية (دوري)

Scanned by CamScanner